MOMENT SETRVAČNOSTI

Obecná část

Pomocí Newtonova pohybového zákona síly můžeme odvodit pohybovou rovnici pro rotační pohyb:

$$M = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I\varepsilon \ , \tag{1}$$

kde M je moment vnější síly působící na těleso, ω úhlová rychlost, ε úhlové zrychlení a veličina I je tzv. moment setrvačnosti tělesa vzhledem k dané ose otáčení. Vyjadřuje míru setrvačnosti rotujícího tělesa, podobně jako hmotnost vyjadřuje míru setrvačnosti tělesa při posuvném pohybu. Pro tuhé těleso (tvořené soustavou hmotných bodů s neproměnnými vzdálenostmi) je dán vztahem:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \ , \tag{2}$$

kde m_i je hmotnost *i*-tého hmotného bodu a r_i je kolmá vzdálenost tohoto bodu od osy otáčení. Moment setrvačnosti tedy závisí jak na hmotnosti tělesa, tak na rozložení této hmoty kolem osy otáčení.

Můžeme vytvořit systém z tělesa a zkrutné pružiny, která bude svým druhým koncem vetknuta do nepohyblivé základny. Po vložení mechanické energie do systému bude těleso vykonávat kmitavý rotační pohyb. Při zanedbatelném tření v ložisku a v pružině bude amplituda kmitů klesat velmi pomalu. Je-li závislost vratného momentu pružiny M na jejím zkroucení α lineární (tj. $M = -k\alpha$, kde k je konstanta pružiny), můžeme pro systém sestavit tuto jednoduchou diferenciální rovnicí:

$$I\frac{\mathrm{d}^2\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2} + k\alpha(t) = 0 \ . \tag{3}$$

Jejím řešením je funkce:

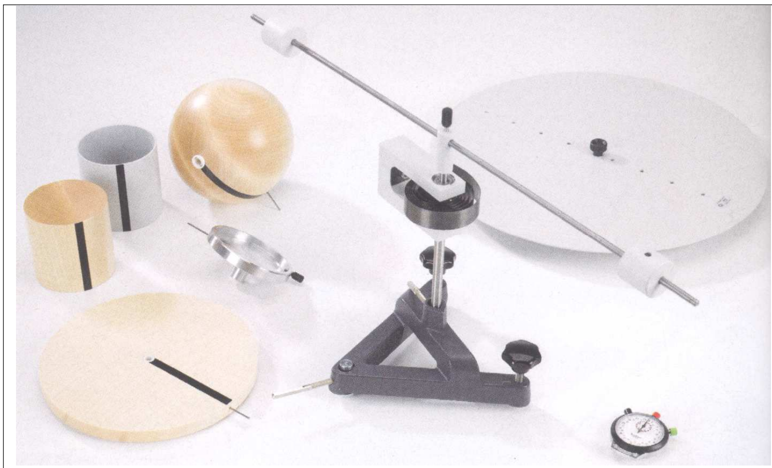
$$\alpha(t) = \alpha_{\max}\cos(\Omega t + \varphi), \quad \text{kde} \quad \Omega = \sqrt{\frac{k}{I}} \ . \tag{4}$$

Ze vztahu pro úhlovou frekvenci Ω vychází pak perioda kmitů:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \ . \tag{5}$$

Měření

Vztahu (5) lze užít k měření momentu setrvačnosti neznámého tělesa nebo k ověření vztahu (2). Stačí rozkmitat systém a změřit periodu kmitů. Je třeba ovšem provést korekci na vlastní moment setrvačnosti spojovací hřídelky nebo podložky. Přípravek pro měření je na obr. 1. Skládá se z tuhého podstavce a ploché vinuté pružiny opatřené hřídelí v kuličkovém ložisku. Na hřídel pak lze nasadit rovnou různá tělesa nebo nosnou podložku pomocí tvarované spojky.



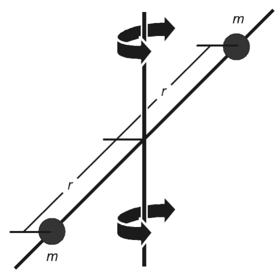
Obr. 1 Přípravek pro měření momentu setrvačnosti

A. Moment setrvačnosti dvou hmotných bodů

Jsou-li body ve stejné vzdálenosti od osy otáčení, je jejich moment setrvačnosti:

$$I_2 = 2mr^2 .$$

„Hmotné body“ představují v našem měření s dostatečnou přesností malé válečky upevněné na tenké tyčce, která je uprostřed spojena s osou rotace. Po vychýlení z rovnovážné polohy (asi o 90°) necháme systém kmitat a změříme dobu kmitu T pomocí stopek. Ze vztahu (5) pak plyne:



Obr. 2

$$I = k\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 . \tag{6}$$

Takto získaný moment setrvačnosti je složen z momentu setrvačnosti I_2 oněch dvou válečků a momentu setrvačnosti spojovací tyčky I_0:

$$I = 2mr^2 + I_0 \tag{7}$$

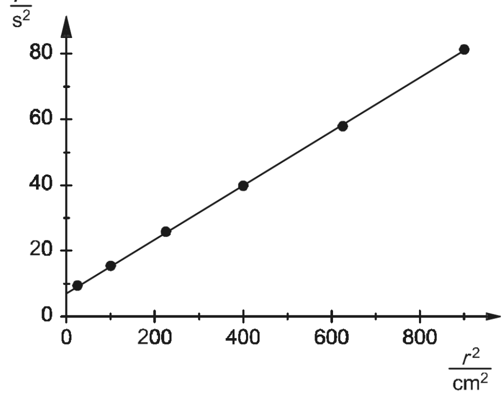
Použitím vztahu (6) v rovnici (7) dostaneme:

$$k\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 2mr^2 + k\left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 , \tag{8}$$

odkud:

$$T^2 = \frac{8m\pi^2}{k} r^2 + T_0^2 . \tag{9}$$

Získali jsme vztah vyjadřující přímkovou závislost mezi čtvercem periody kmitů T^2 a čtvercem vzdálenosti válečků r^2. Měření tedy provedeme nejprve bez válečků (tím získáme T_0), pak pro několik vzdáleností válečků a vyneseme do grafu (viz obr. 3). V grafu ověříme přímkovost závislosti a lineární regresí zjistíme



Obr. 3

směrnici ($8m\pi^2/k$) této přímky. Z ní vypočteme konstantu pružiny *k*. Při měření je vhodné si vyznačit na stole rovnovážnou polohu (např. umístěním tužky). Aby bylo měření přesnější, měříme dobu více (např. pěti) kmitů. Stopky zapínáme, když tyčka s válečky prochází rovnovážnou polohou, a vypínáme při obdobném průchodu po proběhnutí zvoleného počtu kmitů.

Pracovní úkol

1) Proveďte měření doby kmitu pro vzdálenosti válečků: 30, 25, 20, 15, 10, 5 cm a 0 cm (tj. bez válečků). Počáteční výchylku volte přibližně 90°. Pro vzdálenosti 0 až 20 cm měřte dobu 10 kmitů, pro 25 a 30 cm postačí 5 kmitů (oscilace jsou již pomalé). Data uveďte do vhodné tabulky.
2) Zvažte válečky na digitální váze (v místnosti UC103). Stanovte chybu.
3) Sestrojte grafickou závislost (viz. obr. 3). Podklady uveďte rovněž do tabulky.
4) Pomocí lineární regrese zjistěte směrnici a její statistickou chybu (viz. str. 18 skript Fyzikální praktikum)
5) Vypočtěte konstantu pružiny *k* a její chybu (pomocí věty o přenosu chyby na str. 17 skript). Nezapomeňte uvést fyzikální jednotku!

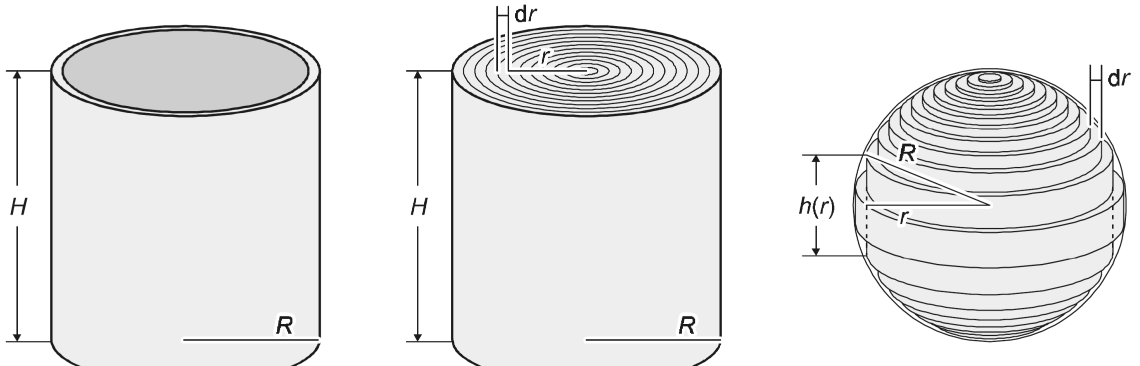
B. Vliv tvaru tělesa na moment setrvačnosti

Pro tělesa se spojitým rozložením hmoty musíme namísto sumy ve vztahu (2) použít integraci. Je-li hustota v celém objemu tělesa konstantní, dostaneme:

$$I = \frac{m}{V}\int_V r^2 \mathrm{d}V \,, \tag{10}$$

kde *m* je hmotnost tělesa, *V* je objem, *r* je vzdálenost objemového elementu d*V* od osy rotace. Nejjednodušším případem je dutý válec, s velmi tenkou stěnou (zanedbatelnou vůči poloměru):

$$I_{DV} = m.R^2 \,. \tag{11}$$



Obr. 4

V případě plného válce vede vztah (10) na výraz:

$$I_{PV} = \frac{m}{V}\int_0^R r^2\, 2\pi r H \mathrm{d}r \,, \quad \text{kde } V = \pi R^2 H \tag{12}$$

$$I_{PV} = \frac{1}{2} mR^2 . \tag{13}$$

Vidíme, že moment setrvačnosti plného válce je o polovinu menší než moment stejně velkého a těžkého válce dutého, jelikož je jeho hmota rozprostřena od osy rotace až po vzdálenost R.

Ještě menší hodnotu můžeme očekávat u koule:

$$I_K = \frac{m}{V} \int_0^R r^2 2\pi r 2\sqrt{R^2 - r^2} \mathrm{d}r , \quad \text{kde } V = \frac{4\pi R^3}{3} \tag{14}$$

$$I_K = \frac{2}{5} mR^2 . \tag{15}$$

V tomto měření tedy ověříme, zda skutečně platí vztahy (11), (13) a (15).

K dispozici máme kouli, disk (tenký válec), plný válec a dutý válec. Dva posledně jmenované nelze nasadit na hřídelku přímo, je třeba použít nosné podložky, jejíž moment setrvačnosti musíme ale také změřit a pak odečíst. Ověření vztahů lze provést např. tak, že vypočteme podíl změřeného momentu setrvačnosti I a součinu změřených hodnot mR^2 daného tělesa a porovnáme jej s podílem teoretického vztahu (1 dutý válec, 1/2 plný válec, 2/5 koule).

Pracovní úkol

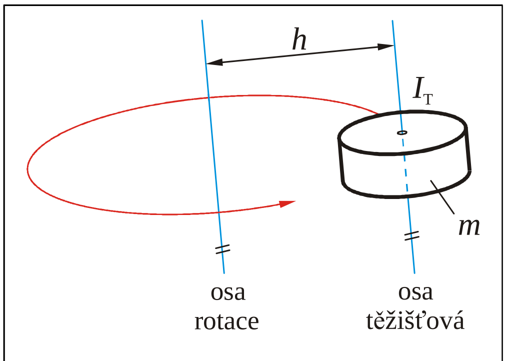
1) Změřte periodu kmitů pro: kouli, disk, dutý a plný válec a samotnou nosnou podložku. Měřte čtyřikrát dobu deseti kmitů, výsledek pak zprůměrujte.
2) Zvažte tělesa na digitální váze, změřte jejich průměry.
3) Uveďte do tabulky hmotnosti, poloměry a naměřené doby kmitů pro tělesa a nosnou podložku.
4) Z naměřených period stanovte momenty setrvačnosti těles a nosné podložky. Pro výpočet použijte konstantu pružiny získanou v úkolu A. U těles kde byla použita nosná podložka nezapomeňte odečíst její moment setrvačnosti.
5) Naměřené momenty setrvačnosti uveďte do další tabulky spolu se změřenými a teoretickými hodnotami podílů I/mR^2. Podíly porovnejte.

C. Steinerova věta

Neprochází-li osa rotace tělesa jeho těžištěm, výpočet I podle vztahu (2) a (10) se neúměrně komplikuje. Pokud však známe moment setrvačnosti tělesa I_T k ose, která prochází jeho těžištěm a je zároveň rovnoběžná s osou rotace, pak můžeme s výhodou použít Steinerovu větu:

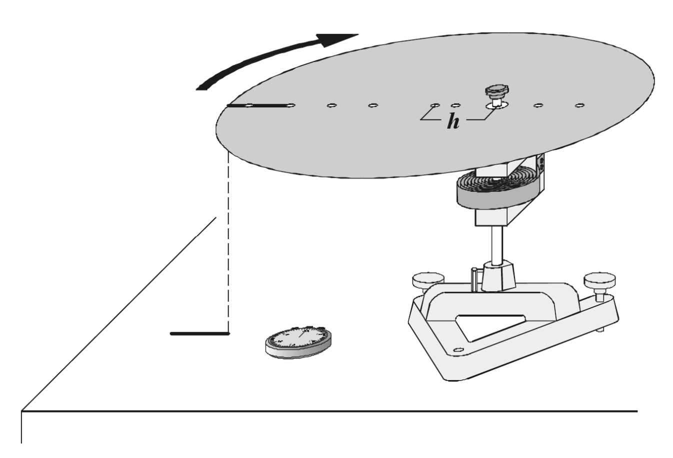
$$I = I_T + mh^2 , \tag{16}$$

kde h je vzdálenost obou os a m je hmotnost tělesa.



Obr. 5 Steinerova věta

V tomto úkolu budeme měřit závislost momentu setrvačnosti plochého kruhového disku na vzdálenosti *h* osy rotace od osy symetrie (viz obr. 6). Disk je vybaven řadou otvorů, do nichž se šroubuje spojka k nasazení na hřídel přípravku. Do grafu pak



Obr. 6 Uspořádání při měření Steinerovy věty

vyneseme závislost změřeného momentu setrvačnosti *I* na kvadrátu vzdálenosti os h^2. Závislost by měla být přímková se směrnicí rovnou hmotnosti disku. Tím ověříme platnost vztahu (16).

Pracovní úkol

1) Změřte dobu pěti kmitů disku pro hodnoty vyosení $h = 0$ až 16 cm s krokem 2 cm (tedy celkem 9 hodnot).
2) Zvažte disk (bez spojky) na digitální váze.
3) Z dob kmitů vypočtěte (*doma*) příslušné momenty setrvačnosti. Pro výpočet použijte konstantu pružiny získanou v úkolu A.
4) Naměřené a vypočtené hodnoty uveďte do vhodné tabulky, též uveďte kvadráty vzdáleností *h*.
5) Sestrojte výše v textu popsanou grafickou závislost, pomocí lineární regrese zjistěte směrnici a porovnejte ji s hmotností disku.