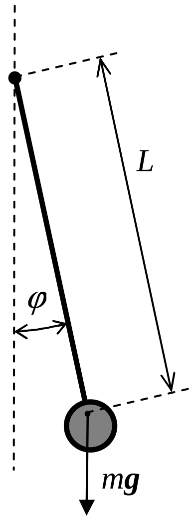
VÁZANÁ KYVADLA

Úvod

Pohybová rovnice fyzikálního kyvadla (obrázek 1) při zanedbání útlumu má tvar

$$I\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} \equiv I\ddot{\varphi} = M = -mgL\sin\varphi \quad ,$$

kde I je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení, φ je úhel výchylky z rovnovážné polohy, M je moment působící síly (tíhy) vzhledem k ose otáčení, m je hmotnost kyvadla a L je vzdálenost osy otáčení a těžiště. Pro malé úhly φ (sin $\varphi \doteq \varphi$) dostáváme rovnici harmonických netlumených kyvů s periodou $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$, resp. s kruhovou frekvencí $\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$.

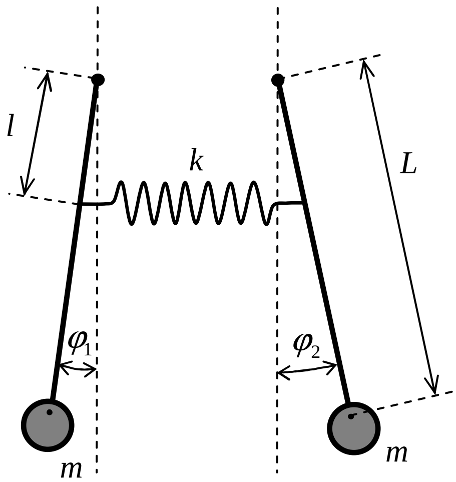


Obr.1: Fyzikální kyvadlo

Spojíme-li dvě stejná kyvadla pružinou o tuhosti k (obrázek 2), pak kromě momentu tíhy vystupuje na pravé straně pohybové rovnice moment síly způsobený pružinou. Při splnění výše uvedeného předpokladu malých úhlů, lze pohybové rovnice obou kyvadel zapsat takto

$$I\,\ddot{\varphi}_1 = -\,mgL\,\varphi_1 - k\,l^2(\varphi_1 - \varphi_2)$$
$$I\,\ddot{\varphi}_2 = -\,mgL\,\varphi_2 - k\,l^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Sečtením a odečtením těchto rovnic dostáváme rovnice harmonických kmitů pro součet $(\varphi_1 + \varphi_2)$ resp. rozdíl $(\varphi_1 - \varphi_2)$ obou výchylek



Obr.2: Vázaná kyvadla

$$I\,(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) = -\,mgL\,(\varphi_1 + \varphi_2)$$
$$I\,(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) = -(mgL + 2kl^2)(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Z obecného řešení

$$(\varphi_1 + \varphi_2) = A_+\cos(\omega_+ t + \alpha_+)$$
$$(\varphi_1 - \varphi_2) = A_-\cos(\omega_- t + \alpha_-)$$

pak opět sečtením a odečtením dostaneme výchylky obou kyvadel

$$\varphi_1 = ½\,(\,A_+\cos(\omega_+ t + \alpha_+) + A_-\cos(\omega_- t + \alpha_-)\,)$$
$$\varphi_2 = ½\,(\,A_+\cos(\omega_+ t + \alpha_+) - A_-\cos(\omega_- t + \alpha_-)\,)\,,$$

kde $\omega_+ = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$ a $\omega_- = \sqrt{\frac{mgL + 2kl^2}{I}}$ a konstanty $A_\pm$ a $\alpha_\pm$ určujeme z počátečních podmínek.

Proberme důležité speciální případy:

1. Počáteční rychlosti obou kyvadel jsou rovny nule ($\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$) a počáteční výchylky jsou stejné ($\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0$). Řešením je harmonické kývání obou kyvadel se **stejnou amplitudou** rovnou počáteční výchylce, **stejnou frekvencí** ω_+ rovnou vlastní frekvenci nevázaných kyvadel (pružina se „neúčastní“ a kdybychom ji odstranili, kyvadla budou kývat stejně) a **ve fázi** (souhlasně).

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_0\,.\cos\,(\,\omega_+ t)$$

Stav, kdy obě kyvadla kývají harmonicky se stejnou frekvencí, se nazývá „mód“. Tento případ tedy nazýváme „*mód ve fázi*“.

2. Počáteční rychlosti obou kyvadel jsou rovny nule a počáteční výchylky jsou opačné ($\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \varphi_0$). Řešením je opět harmonické kývání obou kyvadel se **stejnou amplitudou** rovnou počáteční výchylce, **stejnou frekvencí** ω_- (vazebná pružina zvětšuje frekvenci), ovšem tentokrát **v protifázi** (proti sobě).

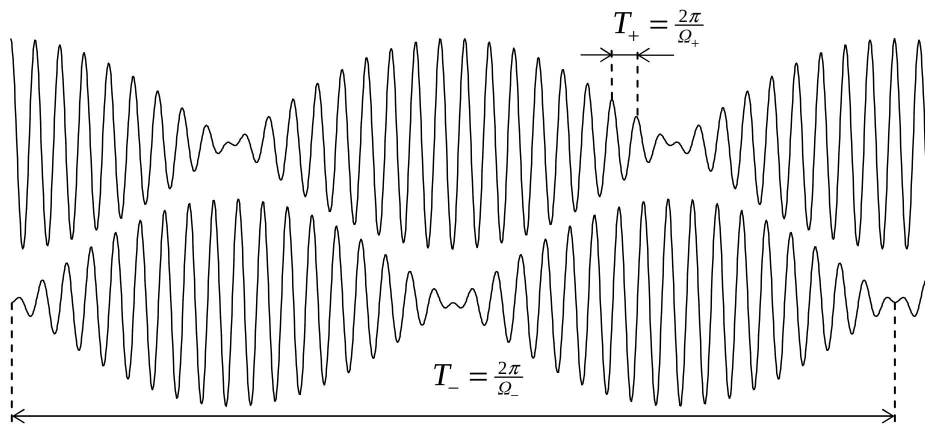
   $\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \varphi_0 .\cos(\omega_- t)$ „*mód v protifázi*“

3. Počáteční rychlosti obou kyvadel jsou rovny nule ($\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$), počáteční výchylka $\varphi_1(0) = \varphi_0$ a $\varphi_2(0) = 0$. Řešením je (po jednoduché úpravě)

   $$\varphi_1(t) = \varphi_0 .\cos\left(\frac{\omega_- - \omega_+}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_- + \omega_+}{2}t\right) = \varphi_0 \cos\Omega_- t\cdot\cos\Omega_+ t$$

   $$\varphi_2(t) = \varphi_0 .\sin\left(\frac{\omega_- - \omega_+}{2}t\right)\cdot\sin\left(\frac{\omega_- + \omega_+}{2}t\right) = \varphi_0 \sin\Omega_- t\cdot\sin\Omega_+ t$$

   V případě slabé vazby (kl^2 malé oproti mgL) jsou frekvence ω_- a ω_+ blízké a řešení má charakter tzv. *rázů* (*záznějů*), kdy střídavě jedno kyvadlo kývá s maximální amplitudou a druhé s minimální (v ideálním případě se zastaví) a takto si mezi sebou předávají energii. Časovou závislost výchylek obou kyvadel ukazuje obrázek 3.



Obr.3 : Rázy

Pro posouzení velikosti vazby se zavádí tzv. *vazebný faktor K*, který může nabývat hodnot 0 až 1 v závislosti na vazebné délce *l*.

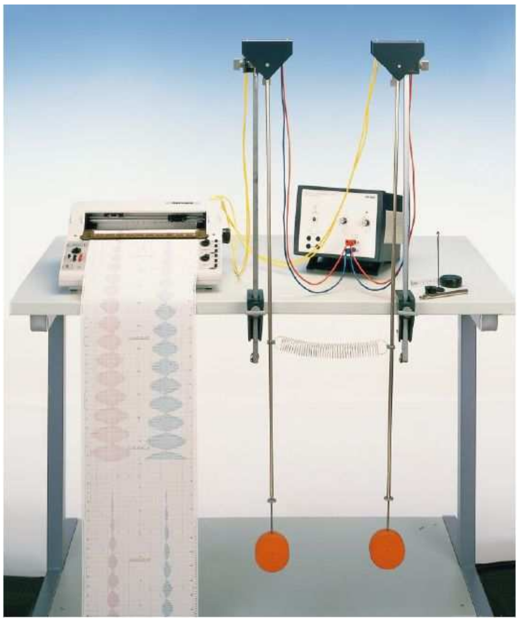
$$K = \frac{kl^2}{mgL + kl^2}. \tag{1}$$

Tento faktor je možno (po jednoduchém dosazení) vyjádřit pomocí kruhových frekvencí ω_- a ω_+ resp. Ω_- a Ω_+.

$$K = \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 + \omega_+^2} = \frac{2\Omega_-\Omega_+}{\Omega_-^2 + \Omega_+^2} \tag{2}$$

Měření

Uspořádání úlohy je patrné z následujícího obrázku. Dvoukanálový zapisovač (který je na obrázku) byl nahrazen měřicím zařízením COBRA3 Basic-Unit firmy PHYWE. Na toto zařízení jsou přiváděna a zaznamenávána v závislosti na čase elektrická napětí, na která jsou výchylky kyvadel převáděny. Proměřením zaznamenaných průběhů lze stanovit periody kmitů, z nich vypočítat kruhové frekvence a poté ověřit platnost níže uvedených vztahů.



Velikost vazby lze jednoduše měnit pomocí vzdálenosti uchycení vazebné pružiny od osy otáčení kyvadla *l*. Pro závislost frekvence ω_- („*protifáze*") na této vzdálenosti lze jednoduše odvodit vztah

$$\omega_-^2 = \omega_+^2 + \frac{2k\omega_+^2}{mgL} l^2 \qquad (3)$$

Dále lze odvodit podobné vztahy pro frekvence rázů Ω_- a Ω_+, které lze za předpokladu slabé vazby zjednodušit.

$$\Omega_- = \frac{\omega_+ \cdot \sqrt{1 + \frac{2kl^2}{mgL}} - \omega_+}{2} \doteq \frac{\omega_+ k}{2mgL} l^2 \qquad (4)$$

$$\Omega_+ = \frac{\omega_+ \cdot \sqrt{1 + \frac{2kl^2}{mgL}} + \omega_+}{2} \doteq \frac{\omega_+ k}{2mgL} l^2 + \omega_+ \qquad (5)$$

Měřením period kmitů lze stanovit kruhové frekvence pro různě silné vazby (vzdálenosti *l*) a ověřit platnost vztahů (3), (4) a (5).

Ve vztahu (1) vystupuje kromě zadaných veličin (*m* a *L* viz bod 7. pracovního úkolu) také tuhost pružiny *k*, kterou určíme měřením. Pružinu zavěsíme na stojan opatřený stupnicí a měříme prodloužení pružiny v závislosti na zatížení. K dispozici máme šest desetigramových závaží. Sestrojíme závislost zatěžovací síly na protažení pružiny

$$F = k \cdot x \ ,$$

ve které je konstantou úměrnosti právě tuhost pružiny.

Při nastavení přístrojů pro měření se řiďte pokyny uvedenými na doplňujícím návodu přiloženém u úlohy.

Pracovní úkol

1. Proměřte závislost protažení vazebné pružiny na zatížení. Sestrojte závislost zatěžovací síly na protažení pružiny. Závislost zpracujte graficky a určete tuhost pružiny *k* metodou lineární regrese (kap. *Chyby měření*, str. 18).
2. Nejprve proměřte nevázaná kyvadla. Ze zaznamenaného průběhu výchylek obou kyvadel určete periody kmitů, z nich vypočtěte kruhové frekvence ω_+ a ověřte, že obě hodnoty jsou přibližně stejné.
3. Dále kyvadla spojte pružinou a proměřte pro čtyři vazebné vzdálenosti l (z intervalu 30 - 80 cm) kyvadla v módu protifáze a v módu rázů. Z odečtených period spočtěte odpovídající kruhové frekvence ω_-, Ω_- a Ω_+ ($\omega = \frac{2\pi}{T}$).
4. Z naměřených hodnot sestrojte grafy závislostí $\omega_-^2(l^2)$, $\Omega_-(l^2)$ a $\Omega_+(l^2)$ těchto frekvencí na vazebné délce.
5. Metodou lineární regrese určete koeficienty přímkové závislosti $\omega_-^2(l^2)$. Porovnáním se vztahem (3) je vidět, že absolutní člen je dán kvadrátem frekvence ω_+. Určete ji a porovnejte s hodnotou získanou v bodě 2.

Další úkoly jsou nepovinné.

6. Ze závislosti $\Omega_+(l^2)$ určete ω_+ podobným způsobem jako v bodě 5. Porovnáním se vztahem (5) vidíme, že absolutní člen nyní dává přímo frekvenci ω_+. Opět ji porovnejte s hodnotou změřenou v bodě 2.
7. Pro každou vazebnou délku vypočtěte z naměřených frekvencí hodnotu vazebného faktoru podle vztahů (2). Porovnejte tyto hodnoty s hodnotou K určenou podle definičního vztahu (1), kam při výpočtu dosaďte m = 1,2 kg a L = 1 m.